第４講　通過領域

13　正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える．

$$C : y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ．

《15 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14　座標平面上の２点 A$(-1,\ 1)$, B$(1,\ -1)$ を考える．また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は１以下であるとする．次の条件(ⅰ)または(ⅱ)をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ．

(ⅰ)　頂点の x 座標の絶対値が１以上の２次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある．

(ⅱ)　点 A，P，B は同一直線上にある．

《15 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15 座標平面の原点をOで表す.

線分 $y=\sqrt{3}x \quad (0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点Pと, 線分 $y=-\sqrt{3}x \quad (-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点Qが, 線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く. このとき線分PQの通過する領域を D とする.

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ を満たす実数とするとき, 点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ.

(2) D を図示せよ.

《14東大・理科(文科に類題)》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　通過領域

13　正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える．

$$C : y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ．

《15 東大・理科》

【答】 略

【解説】 $y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a} \iff 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0$ を a の方程式とみて，これが正の実数解を少なくとも１つもつようなものを考える．

$f(a) = 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1$ とおくと，

(I)　$4(x^2-1)=0$ つまり $x=\pm 1$ のとき，$f(a) = -4ya + 1$ で $f(0) = 1 > 0$ より，求める条件は $-4y < 0$ つまり $y > 0$.

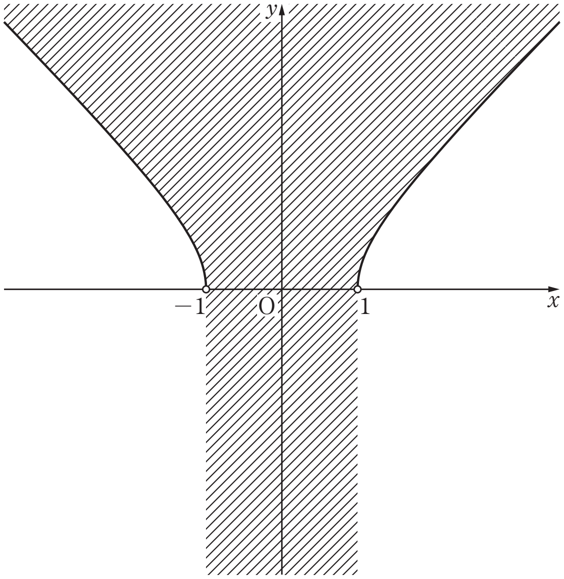
(II)　$4(x^2-1) \neq 0$ つまり $x \neq \pm 1$ のとき，

$f(0) = 1 > 0$ で $f(a) = 4(x^2-1)\left(a - \dfrac{y}{2(x^2-1)}\right)^2 + 1 - \dfrac{y^2}{x^2-1}$ なので，求める条件は

$$\left(4(x^2-1) > 0 \text{ かつ } 1 - \frac{y^2}{x^2-1} \leqq 0 \text{ かつ } \frac{y}{2(x^2-1)} > 0\right) \text{ または } 4(x^2-1) < 0$$

$$\iff (x^2 - y^2 \leqq 1 \text{ かつ } y > 0 \text{ かつ } x < -1,\ 1 < x) \text{ または } -1 < x < 1$$

以上より求める領域は，下図の $x=1$ かつ $y \leqq 0$ と $x=-1$ かつ $y \leqq 0$を含まずに他の境界を含む斜線部分.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14 座標平面上の２点 A$(-1,\ 1)$, B$(1,\ -1)$ を考える．また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は１以下であるとする．次の条件(ⅰ)または(ⅱ)をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ．

(ⅰ) 頂点の x 座標の絶対値が１以上の２次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある．

(ⅱ) 点 A，P，B は同一直線上にある．

《15 東大・文科》

【答】 面積は $\dfrac{4}{3}$

【解説】 A，B を通る直線または軸が y 軸と平行な放物線の方程式は実数の定数 a を用いて $y=a(x+1)(x-1)-x$ …①と表せる．P$(X,\ Y)$ とおくと，P は①上より $Y=a(X+1)(X-1)-X$ …②が成り立つ．また，P の x 座標の絶対値が１以下より $-1\leqq X\leqq 1$ …③である．

ここで $a\neq 0$ のとき①は $y=a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2-\dfrac{1}{4a}-a$ とできるので，条件(ⅰ)より $\dfrac{1}{2a}\leqq -1$, $\dfrac{1}{2a}\geqq 1$

この結果と条件(ⅱ)つまり $a=0$ の場合を合わせて，$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq \dfrac{1}{2}$ …④を得る．

ここで，② $\iff$ $(X^2-1)a-(Y+X)=0$ なので，$f(a)=(X^2-1)a-(Y+X)$ とおいたとき，$f(a)=0$ が④の範囲に少なくとも１つ実数解をもつ条件を考えるとよいので

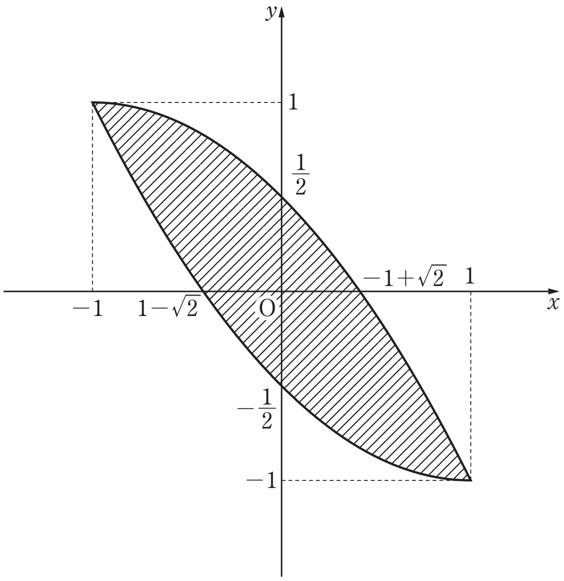
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f\left(\frac{1}{2}\right)\leqq 0 \iff \left(-Y-\frac{1}{2}X^2-X+\frac{1}{2}\right)\left(-Y+\frac{1}{2}X^2-X-\frac{1}{2}\right)\leqq 0$$

$$\iff \left\{Y-\left(-\frac{1}{2}(X+1)^2+1\right)\right\}\left\{Y-\left(\frac{1}{2}(X-1)^2-1\right)\right\}\leqq 0$$

この条件と③より，求める P の領域は $y\leqq -\dfrac{1}{2}(x+1)^2+1$ かつ $y\geqq \dfrac{1}{2}(x-1)^2-1$ となり，次の図の境界を含む斜線部分．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



その面積は

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15　座標平面の原点をOで表す．

線分 $y=\sqrt{3}x$　$(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点Pと，線分 $y=-\sqrt{3}x$　$(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点Qが，線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く．このとき線分PQの通過する領域を D とする．

(1)　s を $0\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ．

(2)　D を図示せよ．

《14東大・理科(文科に類題)》

【答】　(1)
$$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2} & (0\leqq s\leqq 1\text{ のとき}) \\ \sqrt{3}s\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4}{3}\sqrt{3} & (1<s\leqq 2\text{ のとき}) \end{cases}$$
(2)　略

【解説】　(1)　$\mathrm{OP}=\alpha$，$\mathrm{OQ}=\beta$ とすると，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\alpha,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2}\beta,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta\right)$ と表せる．

このとき $\alpha+\beta=6$，$0\leqq\dfrac{1}{2}\alpha\leqq 2$，$-2\leqq-\dfrac{1}{2}\beta\leqq 0$ より $\alpha+\beta=6$，$2\leqq\alpha\leqq 4$，$2\leqq\beta\leqq 4$ となる．

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)\right)=\left(3,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)\right)$ なので，直線PQの傾きは $\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\alpha-\beta)$ となる．

またPQの中点は，$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\alpha+\beta)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ より $\left(\dfrac{\alpha-\beta}{4},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ となる．

よって，線分PQは $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\alpha-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha-\beta}{4}\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ かつ $-\dfrac{\beta}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\alpha}{2}$

つまり $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\alpha-\beta)x-\dfrac{\sqrt{3}}{24}(\alpha-\beta)^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　$\left(-\dfrac{\beta}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\alpha}{2}\right)$ と表せる．

ここで点 $(s,\ t)$ が D に入るという条件は，点 $(s,\ t)$ がある線分PQ上にあるということだから，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\alpha-\beta)s-\dfrac{\sqrt{3}}{24}(\alpha-\beta)^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　$\left(-\dfrac{\beta}{2}\leqq s\leqq\dfrac{\alpha}{2}\right)$ となる実数 α と β が存在するものを考えればよい．

ここで $0\leqq s\leqq 2$ かつ $-\dfrac{\beta}{2}\leqq s\leqq\dfrac{\alpha}{2}$ は，$2\leqq\alpha\leqq 4$ より，$0\leqq s\leqq\dfrac{\alpha}{2}$ である．$\alpha-\beta=u$ とおくと，$\alpha+\beta=6$ と $2\leqq\alpha\leqq 4$ より $\alpha=\dfrac{u+6}{2}$ かつ $-2\leqq u\leqq 2$ なので

$0\leqq s\leqq\dfrac{\alpha}{2}$　$\Longleftrightarrow$　$0\leqq s\leqq\dfrac{u+6}{4}$ つまり $4s-6\leqq u$ だから，

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$t=\frac{\sqrt{3}}{6}us-\frac{\sqrt{3}}{24}u^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{24}(u-2s)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ の $4s-6\leqq u$ かつ $-2\leqq u\leqq 2$ における t の値の範囲を求めればよい．

$f(u)=-\frac{\sqrt{3}}{24}(u-2s)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ とおくと，

(Ⅰ)　$0\leqq s\leqq 1$ のとき

$4s-6\leqq -2$，$0\leqq 2s\leqq 2$ より

$$f(-2)\leqq t\leqq f(2s)\iff -\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4}{3}\sqrt{3}\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(Ⅱ)　$1<s\leqq 2$ のとき

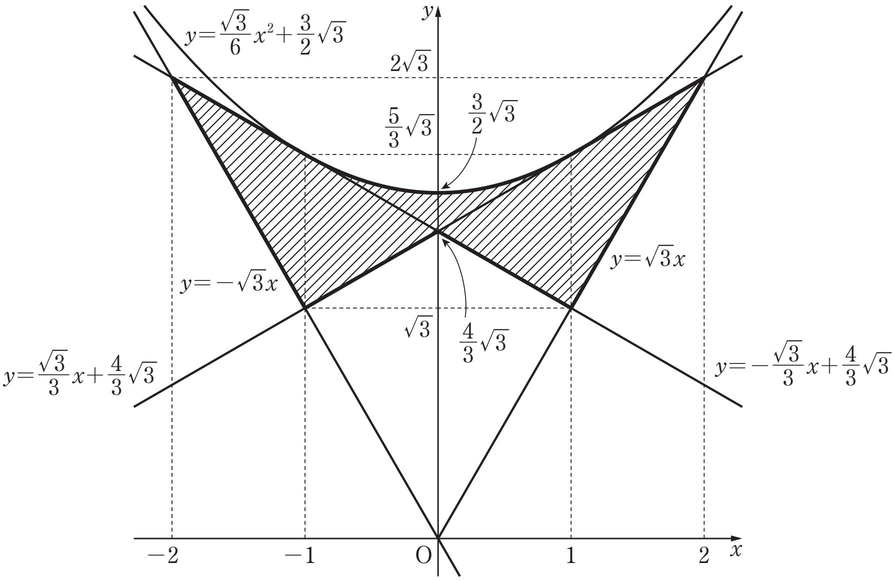
$-2<4s-6\leqq u\leqq 2<2s$ より

$$f(4s-6)\leqq t\leqq f(2)\iff \sqrt{3}s\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

以上より，求める t の範囲は

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4}{3}\sqrt{3}\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2} & (0\leqq s\leqq 1\text{ のとき}) \\ \sqrt{3}s\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4}{3}\sqrt{3} & (1<s\leqq 2\text{ のとき}) \end{cases}.$$

(2)　(1)の結果と y 軸に関する対称性より，求める領域は



©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。